EMPRÉSTITOS CON CUPÓN CORRIDO Y OTRAS FORMAS DE AMORTIZACIÓN

El día 31 de Mayo del 200x en el modo financiero se emiten 2 empréstitos con las siguientes características:

Empréstito A:

- Nº de títulos: 1.000.000
- Nominal 50 €.
- Tipo de interés: 12% anual pagadero por semestres.
- Duración 9 años.
- Amortización por sorteos al 115%. El 1º sorteo se realizará en el 4º año de vida del empréstito.
- Gtos de administración del 1% sobre las cantidades pagadas anualmente.
- Emisión de las obligaciones al 98%.
- Gtos iniciales a cargo del emisor 100.000 €.
- Las obligaciones amortizadas pierden el último cupón.
- Anualidad cte.

Empréstito B:

- Nº de títulos: 500.000.
- Nominal: 100 €
- Tipo de interés 10% anual
- Duración 8 años.
- Las obligaciones perciben los intereses en el momento de ser amortizadas.
- Sorteos anuales con premio de 1000€ para cada una de las 4 1ª obligaciones amortizadas cada año.
- Anualidad cte.

Se pide:

1. Anualidades que amortizan ambos empréstitos.
2. Año 6 del cuadro de amortización del empréstito A.
3. En el empréstito B determinar el nº de títulos en circulación, después del 5º sorteo.
4. Tantos efectivos emisor y obligacionista de ambos empréstitos.
5. Tanto de rendimiento de una obligación comprada en el momento de la emisión y que se reembolse en el 3º sorteo para el empréstito A
6. En el B determinar el tanto de rendimiento de una obligación que se amortice en el 6º sorteo con lote.

1. Anualidades de cada empréstito

Se trate de un empréstito de cupón periódico y postpagable, con características comerciales y gtos, cuyo esquema es:

$$\alpha = [C.Nk.i + Mk\ (C + P - Ci\_2\ )]\ x\ (1 + g)$$

Vamos a normalizar la anualidad anterior para convertirla en la expresión de la anualidad de un empréstito normal de la forma:

$$\alpha = C.N_k\ .i + C.M_k$$

PASOS DE LA NORMALIZACIÓN:

1. Pasamos (1+g) al otro lado de la expresión

$$\frac{\alpha}{1+g} = C\ N_k\ i + M_k\ (C + P - Ci_2)$$

2. El siguiente paso será dividir por $(C + P - Ci_2)$

$$\frac{\frac{\alpha}{1+g}}{C+P-Ci_2} = C.N_k \frac{i}{C+P-Ci_2} + M_k \frac{C+P-Ci_2}{C+P-Ci_2}$$

3. El último paso será multiplicar ambas partes de la expresión por C

$$\frac{\frac{\alpha}{1+g}}{C+P-Ci_2}.\ C = C.N_k \frac{Ci}{C+P-Ci_2} + M_k.C$$

Si denominamos $\beta = \frac{\frac{\alpha}{1+g}}{C+P-Ci_2}\ x\ C$; y $j = \frac{Ci}{C+P-Ci_2}$, ya tendremos la expresión de la anualidad de un empréstito tipo 1 normal.

$$\beta = C.N_k\ .\ j + M_k.C$$

Calculamos en primer lugar j:

$$i = (1+i_2)^2-1 = (1{,}06)^2-1 = 0{,}1236$$

$$j = \frac{Ci}{C+P-Ci_2} = \frac{50\ x\ 0{,}1236}{50+7{,}5-(50\ x\ 0{,}06)} = \frac{6{,}18}{57{,}5-3} = 0{,}11339 = 0{,}1134$$

A partir de j, ya podemos calcular:

1) β y a partir de β calculamos α

2) El nº de títulos amortizados $M_1 = \frac{N_1}{Sn\ j}$

Cálculo de la anualidad α que amortiza el empréstito

Primero hallamos β utilizando la ecuación de equivalencia financiera.

$$N_1.C = \beta\, a_{\overline{n}|j}$$

$$\beta = \frac{50.000.000}{\frac{1-(1+0{,}1134)^{-6}}{0{,}01134}} = 11.934.819{,}22/11.934.477{,}39$$

Conocido el valor de β, ya podemos calcular α

$$\beta = \frac{\frac{\alpha}{1+g}}{C+P-Ci_2} \times C \qquad \beta(C + P - Ci_2) = \left(\frac{\alpha}{1+g}\right) \times C$$

$$\frac{\beta\,(C+p-Ci_2)}{C} = \frac{\alpha}{1+g}$$

$$\frac{\beta\,(C+P-Ci_2)}{C} = \frac{\alpha}{1+g}$$

$$\alpha = \left[\frac{\beta\,(C+p-Ci_2)}{C}\right] \times (1+g)$$

$$\alpha = \left[\frac{11.934.819{,}22\ (50+7{,}5-3)}{50}\right] \times (1+0{,}01)$$

α = 13.139.042,48 anualidad que amortiza el empréstito, con todos los decimales= 13.138.666,16

Empréstito B:

Se trata de un empréstito cupón cero, ya que los intereses se pagan al vto, es decir, se formaliza como un PRUPAI, y con lotes.

La estructura de la anualidad cte será:

$$\alpha = C(1+i)^k M_k + L$$

Normalizando:

$$\alpha - L = C(1+i)^k M_k$$

$$\alpha' = C(1+i)^k M_k$$

$$\alpha' = \alpha - L$$

$$N_1.C = \alpha'\, a_{\overline{n}|j}$$

$$\alpha' = \frac{N_1.C}{an\ i} = \frac{500.000 \times 100}{a8\ 0{,}1} = \frac{50.000.000}{\frac{1-(1+0{,}1)^{-8}}{0{,}01}} = 9.372.200{,}88$$

$$\alpha = \alpha' + L = 9.372.200{,}88 + 4.000 = 9.376.200{,}88$$

2. **Año** 6 del cuadro de amortización del empréstito A.

1º. Calculamos el nº de títulos a amortizar cada año

$M_1 = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|j}} = \frac{10.000}{S_{10\ 0,1134}} = \frac{1.000.000}{\frac{(1+0,1134)^6-1}{0,1134}}$ = 125.298,12 ⟶ 125.298

$M_2 = M_1$ (1 + 0,1134) = 125.298,12(1 + 0,1134) = 139.506,29 ⟶ 139.506

$M_3 = M_2$ (1 + 0,1134) 139.506,29 (1 + 0,1134) = 155.325,48 ⟶ 155.325

$M_4 = M_3$ (1 + 0,1134) = 155.325,48(1 + 0,1134) = 172.938,53 ⟶ 172.938

$M_5 = M_4$ (1 + 0,1134) 172.938,53 (1 + 0,1134) = 192.548,81 ⟶ 192.549

$M_6 = M_5$ (1 + 0,1134) = 192.548,81(1 + 0,1134) ⟶ 214.38

n	n´	k	α	$CN_K \cdot i_2$	$M_k \cdot (C+P-Ci_2)$	g	N_{K+1}	M_K
0 1		0.0 0.1 0.2	- 3.030.000 3.030.000	- 3.000.000 3.000.000	- - -	- 30.000 30.000	1.000.000	 -----------
2		1.1 1.2	3.030.000 3.030.000	3.000.000 3.000.000	- -	30.000 30.000		 -----------
3	0´	2..1 2.2/0.0´	3.030.000 3.030.000	3.000.000 3.000.000	- -	30.000 30.000	 1.000.000	 -----------
4	1´	0.1´ 0.2´´	3.030.000 9.927.028,41	3.000.000 3.000.000	- 6.828.741	30.000 98.287,41	 874.702	 125.298
5	2´	1.1´ 1.2´	 10.329.454,83	2.624.106 2.624.106	 7.603.077	26.241,06 102.271,83	 735.196	 139.506
6	3´	2.1´ 2.2´	2.227.643,88 10.777.508,50	2.205.588 2.205.588	 8.465.212,5	22.055,88 106.708	 579.871	 155.325
7	4´	3.1´ 3.2´	 11.276.381,34	1.739.613 1.739.613	 9.425.121	17.396,13 111.647,34	 406.933	 172.938
8	5´	4.1´ 4.2	 11.837.926,19	1.220.799 1.220.799	 10.493.920,5	12.207,99 117.147,19	 214.384	 192.549
9	6´	5.1´ 5.2´´	 11.559.788	643.152 643.152	 11.683.928	6.431,52 123.270	 0	 214.384

En rojo los datos que nos pide el problema

3. En el empréstito B determinar el nº de títulos en circulación, después del 5º sorteo.

$$N_{K+1} = \frac{\beta}{C}\, a_{\overline{n-k}|i}$$

$$N_{5+1} = \frac{9.372.200,88}{100} \cdot \frac{1-(1,1)^{-(8-5)}}{0,1} = 233.072,76$$

4. Tantos efectivos emisor y obligacionista de ambos empréstitos.

Empréstito A:
Tanto emisor:

$$N_1V - G = 3.030.000\ a_{\overline{6}|r_2} + 13.138.666{,}16\ a_{\overline{6}|r}\ (1+r)^{-3}$$

$$3.030.000\frac{1-(1+r_2)^{-6}}{r_2} + 13.138.666{,}16\frac{1-(1+r)^{-6}}{r}(1+r)^{-3} - 48.900.000 = 0$$

Si r = 14% r_2 = 6,6770% ⟹ 131.316,65
Si r = 15% r_2 = 7,238% ⟹ -186549,12
X = 0,06576 %
i_e= 14,06576

Tanto obligacionista:

$$3.000.000\ \frac{1-(1+r_2)^{-6}}{r_2} + 13.008.580{,}56\ \frac{1-(1+r)^{-6}}{r}(1+r)^{-3} - 49.000.000 = 0$$

Si r = 13%; r_2= 6,30% ⟹1654247,46
Si r = 14% r_2 = 6,6770% ⟹ 454141,82
X= 0,7846%
i_o = 13,7846%

Empréstito B:

$$I_e = i_o = i = 10\%$$

EMPRÉSTITOS POR DISTINTOS MEDIOS DE AMORTIZACIÓN.

Una empresa emite 10.000 obligaciones de valor nominal 30 €, al 10% de interés, deseándose amortizar el empréstito en tres años.

Calcular los cuadros de amortización empleando los métodos:

- Francés o progresivo.
- Francés si cada año se compromete la citada empresa a sortear entre los títulos vivos un lote de 60€, 2 de 30€ y cinco de 12€.
- Método americano. El fondo de amortización para este caso se puede colocar al 12%.
- Método alemán o de intereses anticipados.

Francés o progresivo.

$$M_1 = \frac{N_1}{S\ n\ i} = \frac{10.000}{S\ 3\ \ 0{,}1} = \frac{10.000}{\frac{(1+0{,}1)^3-1}{0{,}1}} = 3.021$$

$$M_2 = M_1\ (1 + 0{,}1) = 3.021\ (1 + 0{,}1) = 3.323$$

$$M_3 = 3.656$$

n	α_s	$CN_K \cdot i$	$C \cdot M_k$	N_{K+1}	M_K
0	-	-	-	10.000	-
1	120.630	30.000	90.630	6.979	3.021
2	120.627	20.937	99.690	3.656	3.323
3	120.648	10.968	109.680	0	3.656

Francés si cada año se compromete la citada empresa a sortear entre los títulos vivos un lote de 60€, 2 de 30€ y cinco de 12€.

n	α_s	$CN_K \cdot i$	$C \cdot M_k$	N_{K+1}	M_K	L
0	-	-	-	1.000	-	-
1	120.810	30.000	90.630	6.979	3.021	180
2	120.807	20.937	99.690	3.656	3.323	180
3	120.828	10.968	109.680	0	3.656	180

Método americano. El fondo de amortización para este caso se puede colocar al 12%.

$$\alpha = N_1Ci + f$$

$$f = \frac{N_1\ C}{\frac{(1+r)^n-1}{r}} = 88.909,69$$

n	Fdo anual	Cuota de interés	Fdo acumulado
1	88.909,69	---------------	88.909,69
2	88.909,69	10.668,56	188.487,94
3	88.909,69	22.617,35	300.000

Método alemán o de intereses anticipados.

$$\beta = \frac{\alpha}{1-i}; \quad j = \frac{i}{1-i} = \frac{0,1}{1-0,1} = 0,1111111$$

$$N_1.C = \frac{\alpha}{0,9}\ a_{n\rceil j}$$

$$10.000x30x0,9 = \alpha\ \frac{1-1,111^{-3}}{0,111}$$

$\alpha = 110.701,107$

n	α_s	$CN_K \cdot i$	$C \cdot M_k$	N_{K+1}	M_K
0	-	30.000	-	10.000	-
1	110.703	21.033	89.670	7.011	2.989
2	110.700	11.070	99.630	3.690	3.321
3	110.700	-	110.700	0	3.690

$M_1 = \frac{N_1}{Sn\ j} = \frac{10.000}{S3\ 0{,}1111} = \frac{10.000}{\frac{(1+0{,}111)^3-1}{0{,}111}}$ = 2.988,93; ***2.989***

$M_2 = M_1\ (1 + 0{,}111)$= 3.321,033; ***3.321***

$M_3 = M_2\ (1 + 0{,}111)$ = 3690,37; 3.690